מבחן בקורס מודלים חישוביים, חישוביות וסיבוכיות (67521)

מועד א, תאריך 22.8.23, שעה 14:30

מרצים: פרופ' עמרי וינשטין ופרופ' עודד שוורץ
מתרגלים: יואב גרוס, עופר לשקוביץ ונעמה שמש-הלוי
צארים: שי לב, יואב פיינשטיין

הוראות כלליות:

1. משך המבחן 3 שעות.
2. במבחן 9 שאלות, יש לענות על כולן.
3. סך הנקודות במבחן זה הוא 108 נקודות. ציון המבחן יהיה סך הנקודות שצברת, כאשר הציון המקסימלי שניתן לקבל הוא 100.
4. השיבו על השאלות על גבי טופס זה בלבד. **המחברות הן טיוטה ולא ייבדקו.**
5. במידה ואתם זקוקים למקום נוסף לצורך מענה על סעיף כלשהו, השתמשו בדפי התשובות הריקים המופיעים בסוף טופס זה. אם אתם זקוקים לדפי תשובות נוספים, עליכם לבקש מהמשגיח/ה טופס שלם נוסף. אין להוסיף דפים בודדים.
6. נסחו במדויק כל טענה בה אתם עושים שימוש. מותר להשתמש בטענות שנלמדו בכיתה, בתרגול או בתרגיל אלא אם נתבקשתם להוכיח אותן בשאלה.
7. השימוש בכל חומר עזר אסור למעט דפי הנוסחאות שמצורפים בעמודים הבאים.

בהצלחה!

דפי נוסחאות - מודלים חישוביים, חישוביות וסיבוכיות (67521)

The following table summarizes the definition of all learned classes and their closure properties. A cell is marked with '?' if we have not seen the relevant result, and it is marked with 'Open' if the relevant result is an open problem. E.g., we have not seen whether PSPACE is closed under concatenations, and it is open whether NP and CoNP are closed under complementation.

Class	Definition	$L_1 \cup L_2$	$L_1 \cap L_2$	$\overline{L}$	$L_1 \cdot L_2$	L^*	$\mathrm{Perf}(L)$
REG	Languages recognized by a DFA	✓	✓	✓	✓	✓	✓
R	Languages decided by a TM	✓	✓	✓	✓	✓	X
RE	Languages recognized by a TM	✓	✓	X	✓	✓	?
CoRE	$\{L \subseteq \Sigma^* : \overline{L} \in \mathrm{RE}\}$	✓	✓	X	✓	✓	?
P	$\bigcup_{k=1}^{\infty} \mathrm{TIME}\left[n^k\right]$	✓	✓	✓	✓	✓	X
NP	$\bigcup_{k=1}^{\infty} \mathrm{NTIME}\left[n^k\right]$	✓	✓	Open	✓	✓	X
CoNP	$\{L \subseteq \Sigma^* : \overline{L} \in \mathrm{NP}\}$	✓	✓	Open	✓	✓	X
PSPACE	$\bigcup_{k=1}^{\infty} \mathrm{SPACE}\left[n^k\right]$	✓	✓	✓	?	?	X
EXP	$\bigcup_{k=1}^{\infty} \mathrm{TIME}\left[2^{n^k}\right]$	✓	✓	✓	?	?	X

Theorem 1 (The Pumping lemma)**.** *Let $L \in REG$, then there exists a constant $p > 0$ such that for every $w \in L$ that satisfies $|w| > p$, there exist $x, y, z \in \Sigma^*$ such that $w = xyz$ and:*

(1) $0 < |y|$

(2) $|xy| \leq p$

(3) *For every $i \in \mathbb{N}$, it holds that $xy^iz \in L$*

Definition 1 (Computable function)**.** A function $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ is called *computable*, if there is a Turing machine that on every input w halts with $f(w)$ written on the tape.

Definition 2 (Mapping reduction)**.** A mapping reduction from a language L to a language K is a computable function $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ such that $w \in L \iff f(w) \in K$. If such a function f exists, we say that L is reducible to K, and write $L \leq_m K$.

Theorem 2 (The mapping reduction theorem)**.** *If $L \leq_m K$ then:*

- *If $K \in RE$ then $L \in RE$*
- *If $K \in CoRE$ then $L \in CoRE$*

Theorem 3 (Rice's theorem)**.** *Let P be a non-trivial semantic property of TM's, then $L_P = \{\langle M \rangle : M \in P\} \notin R$.*

Theorem 4. *Let $T_\emptyset$ be a TM s.t. $L(T_\emptyset) = \emptyset$, and let P be a non-trivial semantic property of TM's such that $T_\emptyset \notin P$, then $A_{TM} \leq_m L_P$.*

Definition 3 (Polynomial time computable function)**.** A function $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ is *computable in polynomial time*, if there is a Turing machine M and a polynomial p, such that on every input w, M halts within at most $p(|w|)$ steps with $f(w)$ written on the tape.

Definition 4 (Polynomial Reduction)**.** A polynomial reduction from a language L to a language K is a function $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ that is computable in polynomial time, such that $w \in L \iff f(w) \in K$. If such a function f exists, we say that L is reducible to K in polynomial time, and write $L \leq_p K$.

Theorem 5 (The polynomial reduction theorem)**.** *If $L \leq_p K$ then:*

- *If $K \in P$ then $L \in P$*
- *If $K \in NP$ then $L \in NP$*
- *If $K \in CoNP$ then $L \in CoNP$*
- *If $K \in PSPACE$ then $L \in PSPACE$*

Theorem 6. *For every $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ it holds that $TIME[f(n)] \subseteq NTIME[f(n)] \subseteq SPACE[f(n)] \subseteq TIME\left[2^{O(f(n))}\right]$.*

Theorem 7 (Savitch's theorem)**.** *For every space constructible function $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ where $f(n) \geq \log n$, it holds that $NSPACE[f(n)] \subseteq SPACE\left[f^2(n)\right]$.*

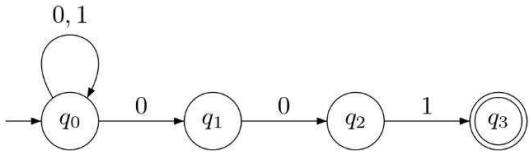
Theorem 8 (The time hierarchy theorem)**.** *Let $t : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ be a time constructible function, then there exists a language $L \in TIME[t(n)]$ such that $L \notin TIME\left[o\left(\frac{t(n)}{\log(t(n))}\right)\right]$.*

Theorem 9 (The space hierarchy theorem)**.** *Let $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ be a space constructible function, then there exists a language $L \in SPACE[s(n)]$ such that $L \notin SPACE[o(s(n))]$.*

Class	Language		
$\overline{\text{REG}}$	$\{0^n 1^n : n \in \mathbb{N}\}$	$\{1^{n^2} : n \in \mathbb{N}\}$	$\{w \in \{0,1\}^* : \#_0(w) = \#_1(w)\}$
R	$\text{RE}_{\text{TM}} = \{\langle M \rangle : L(M) \in \text{RE}\}$		
RE\R	$A_{\text{TM}} = \{\langle M, w \rangle : M \text{ accepts } w\}$	$HALT_{\text{TM}} = \{\langle M, w \rangle : M \text{ halts on } w\}$	
	$\text{NE}_{\text{TM}} = \{\langle M \rangle : L(M) \neq \emptyset\}$	$HALT_{\varepsilon} = \{\langle M \rangle : M \text{ halts on } \varepsilon\}$	
$\overline{\text{RE} \cup \text{CoRE}}$	$\text{REG}_{\text{TM}} = \{\langle M \rangle : L(M) \in \text{REG}\}$	$\text{DECIDER}_{\text{TM}} = \{\langle M \rangle : M \text{ is a decider TM}\}$	
	$\text{ALL}_{\text{TM}} = \{\langle M \rangle : L(M) = \Sigma^*\}$	$\text{EQ}_{\text{TM}} = \{\langle M_1, M_2 \rangle : L(M_1) = L(M_2)\}$	
P	$\text{EC} = \{\langle G \rangle : G \text{ has an euler cycle}\}$		
	$\text{SPATH} = \{\langle G, u, v, k \rangle : G \text{ contains a simple path of length at most } k \text{ from } u \text{ to } v\}$		
	For $k \leq 2$: $\text{k-COLOR} = \{\langle G \rangle : G \text{ is an undirected graph that admits } k\text{-coloring}\}$		
NP-C	For $k \geq 3$: $\text{k-COLOR} = \{\langle G \rangle : G \text{ is an undirected graph that admits k-coloring}\}$		
	$\text{SAT} = \{\varphi : \varphi \text{ is a satisfyable boolean CNF formula}\}$		
	$\text{k-SAT} = \{\varphi : \varphi \text{ is a satisfyable boolean k-CNF formula}\}$ when $k \geq 3$		
	$\text{IS} = \{\langle G, k \rangle : G \text{ has an independent set of size } k\}$		
	$\text{CLIQUE} = \{\langle G, k \rangle : G \text{ has a clique of size } k\}$		
	$\text{SS} = \text{SubsetSum} = \left\{\langle A, s \rangle : A \text{ is a set of numbers s.t. } \exists B \subseteq A : \sum_{b \in B} b = s\right\}$		
	$\text{D-ST-HAMPATH} = \{\langle G, s, t \rangle : G \text{ is a directed graph that has a hamiltonian path from } s \text{ to } t\}$		
	$\text{D-HAMPATH} = \{\langle G \rangle : G \text{ is a directed graph that has a hamiltonian path}\}$		
	$\text{D-HAMCYCLE} = \{\langle G \rangle : G \text{ is a directed graph that has a hamiltonian cycle}\}$		
	The undirected version of the above three languages: U-ST-HAMPATH, U-HAMPATH, U-HAMCYCLE		
	$\text{VC} = \{\langle G, k \rangle : G \text{ has a vertex cover of size } k\}$		
	$\text{DS} = \{\langle G, k \rangle : G \text{ has a dominating set of size } k\}$		
	$\text{SET-COVER} = \{\langle U, S, k \rangle : \text{There is a cover of } U \text{ from } S \text{ of size } k\}$		
	$\text{ILP} = \{\langle A, b \rangle : A \in \mathbb{Z}^{m \times n}, b \in \mathbb{Z}^m, \exists x \in \{-1, 0, 1\}^n : Ax \leq b\}$		
	$\text{LPATH} = \{\langle G, u, v, k \rangle : G \text{ contains a simple path of length at least } k \text{ from } u \text{ to } v\}$		
CoNP-C	$\text{CONTRADICTION} = \{\varphi : \varphi \text{ is a boolean formula with no satisfying assignments}\}$		
	$\text{TAUTOLOGY} = \{\varphi : \varphi \text{ is a boolean formula that every assignment satisfies}\}$		
PSPACE-C	$\text{TQBF} = \{\langle \varphi \rangle : \varphi \text{ is a fully quantified formula equivalent to } \mathsf{True}\}$		
	$\text{ALL}_{\text{NFA}} = \{\langle \mathcal{A} \rangle : \mathcal{A} \text{ is an NFA with } L(\mathcal{A}) = \Sigma^*\}$		
	$\text{MIN}_{\text{NFA}} = \{\langle \mathcal{A}, k \rangle : \mathcal{A} \text{ is an NFA and there exists an NFA } \mathcal{B} \text{ with } k \text{ states s.t. } L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{B})\}$		

שאלה 1 (12 נקודות)

נתון ה-NFA הבא מעל האי"ב $\Sigma = \{0,1\}$ המסומן ב-A:



תארו בעזרת ציור DFA B השקול ל-A. כלומר תארו אוטומט דטרמיניסטי B כך ש $L(A) = L(B)$.

האוטומט B:

<u>שאלה 2 (12 נקודות)</u>

יהי NFA A עם n מצבים.

נתון כי קיימת מילה $w \in L(A)$ כך ש $|w| > n$.

כלומר קיימת מילה שאורכה גדול ממספר המצבים באוטומט.

טענה : השפה $L(A)$ היא אינסופית.

סמנו : הטענה נכונה הטענה לא נכונה

הוכחה :

שאלה 3 (12 נקודות)

יהי א״ב Σ.

לכל NFA A מעל Σ, נגדיר את A_{mirror} להיות NFA זהה ל-A למעט שכל מצב מקבל הופך לדוחה וכל מצב דוחה הופך למקבל.

טענה: לכל NFA A מתקיים שהשפה $L(A_{mirror})$ היא השפה המשלימה לשפה $L(A)$.

כלומר מתקיים $L(A_{mirror}) = \Sigma^* \setminus L(A)$.

סמנו: הטענה נכונה הטענה לא נכונה

הוכחה:

שאלה 4 (12 נקודות)

סווגו את השפה הבאה:

$$L = \left\{ \langle M_1, M_2 \rangle : \begin{array}{c} M_1 \text{ and } M_2 \text{ are TMs with the same input} \\ \text{alphabet s.t. } L(M_1) \cap L(M_2) = \emptyset \end{array} \right\}$$

המחלקה: $\overline{RE \cup coRE}$ $coRE \backslash R$ $RE \backslash R$ R

הוכחה:

שאלה 5 (12 נקודות)

טענה: קיימת רדוקציית מיפוי מהשפה ALL_{NFA} לשפה VC. כלומר $ALL_{NFA} \leq_m VC$.

סמנו: הטענה נכונה הטענה לא נכונה

הוכחה:

שאלה 6 (12 נקודות)

סווגו את השפה הבאה:

$$L = \left\{ \langle M \rangle : \begin{array}{c} M \text{ is a TM and there exists a letter } \sigma \text{ in the input alphabet} \\ \text{of } M \text{ s.t. } M \text{ accepts } \sigma\sigma \text{ in one step but does not halt on } \sigma\sigma\sigma\sigma \end{array} \right\}$$

המחלקה: $\overline{RE \cup coRE}$ $coRE \setminus R$ $RE \setminus R$ R

הוכחה:

שאלה 7 (12 נקודות)

השמה $(a_1, \dots, a_n) \in \{0,1\}^n$ תקרא *נקודתית (point assignment)* אם קיים $1 \le i \le n$ יחיד כך ש- $a_i = 1$ וגם $a_j = 0$ לכל $j \neq i$. כלומר השמה של 0 לכל המשתנים למעט בדיוק משתנה אחד.

למשל (0,1,0,0) נקודתית, ואילו (0,1,1,0) או (0,0,0,0) אינן.

נגדיר:

$$POINT - SAT = \{\langle \varphi \rangle : \varphi \text{ is Boolean formula with a satisfying point assignment}\}$$

טענה: אם $SAT \le_p POINT - SAT$ אז $P = NP$.

סמנו: הטענה נכונה הטענה לא נכונה

הוכחה:

שאלה 8 (12 נקודות)

לאיזה מחלקה שייכת השפה הבאה?

$$L = \{\langle G, k\rangle : \begin{array}{c} G \text{ is an undirected graph, } k \geq 1 \text{ is an integer given in unary,} \\ \langle G, k\rangle \in VC \text{ and } \langle G, k\rangle \in IS \end{array}\}$$

המחלקה: P $NP - complete$ $PSPACE - complete$

הוכחה:

שאלה 9 (12 נקודות)

בהינתן א״ב Σ ואות חדשה $\# \notin \Sigma$, נגדיר את הפעולה $AtLeastTwo$ עבור שפה $L \subseteq \Sigma^*$ באופן הבא:

$$AtLeastTwo(L) = \left\{ w_1\#w_2\#\ldots\#w_n : \begin{array}{c} n \geq 2, w_i \in \Sigma^* \text{ for all } 1 \leq i \leq n, \text{ and there} \\ \text{exists two distinct indices } 1 \leq i < j \leq n \\ \text{s.t. } w_i \in L \text{ and } w_j \in L \end{array} \right\}$$

טענה: אם $L \in$ NP-Complete אז $AtLeastTwo(L) \in$ NP-Complete

סמנו: הטענה נכונה הטענה אינה נכונה

הוכחה

עמוד תשובות נוסף, מספר 1

המשך שאלה _____ סעיף _____

עמוד תשובות נוסף, מספר 2

המשך שאלה _____ סעיף _____

עמוד תשובות נוסף, מספר 3

המשך שאלה _____ סעיף _____

עמוד תשובות נוסף, מספר 4

המשך שאלה _____ סעיף _____

עמוד תשובות נוסף, מספר 5

המשך שאלה _____ סעיף _____

עמוד תשובות נוסף, מספר 6

המשך שאלה _____ סעיף _____